

Der $\mathbb{R}^3$



$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

• spezielle Vektoren: • Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

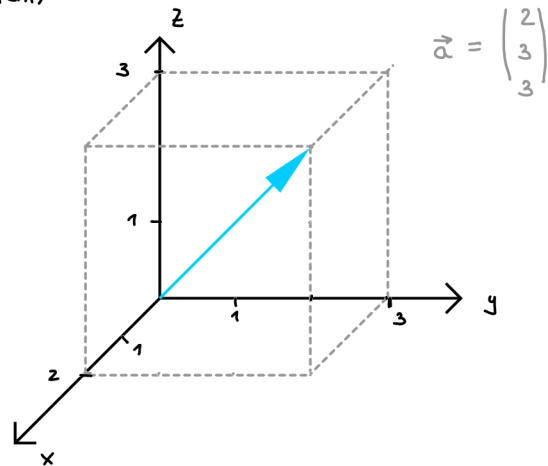
• Standard-Einheitsvektoren: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{x} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3$

• Standard-Skalarprodukt: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right\rangle = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \in \mathbb{R}$

• Standard-Norm: $\|\vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \geq 0$

• Veranschaulichung (Kartesisches Koordinatensystem)



Spezielles Produkt im $\mathbb{R}^3$: Kreuzprodukt



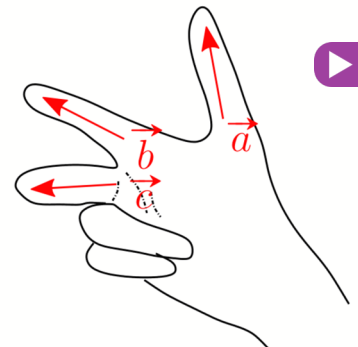
Das Kreuzprodukt (auch: Vektorprodukt) weist zwei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ einen dritten Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ zu,

- der senkrecht zu der (gedachten) Ebene steht, in der die beiden Ausgangsvektoren liegen. und
- der mit den beiden Ausgangsvektoren (einer sei als der „erste“ Vektor, der andere als „zweiter“ Vektor bezeichnet) als dritter Vektor ein Rechtssystem bildet und



anschauliche Definition:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, wenn sie der Rechte-Hand-Regel folgen, d.h. wenn Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger so ausgerichtet werden können dass sie im Wesentlichen den Repräsentanten von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ folgen.



- dessen Länge / Norm gleich ist zum Flächeninhalt des Parallelogramms das von den Vektoren $\vec{a}$ & $\vec{b}$ aufgespannt wird.



Definition (Kreuzprodukt / Vektorprodukt)

Unter dem Kreuzprodukt/Vektorprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ versteht man den eindeutig bestimmten Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, der folgende Eigenschaften aufweist:

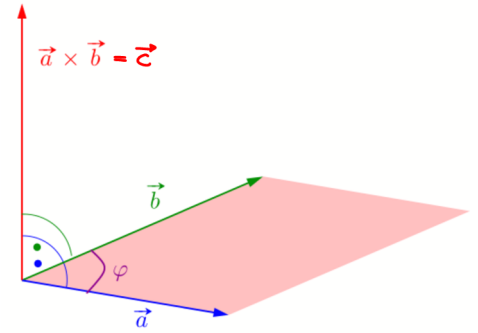
i.) $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$, und zu $\vec{b}$, d. h. es gilt $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ bzw.

$$\langle \vec{c}, \vec{a} \rangle = 0 \quad \& \quad \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle = 0$$

ii.) Die Norm von $\vec{c}$ ist gleich dem Produkt der Normen von $\vec{a}$ & $\vec{b}$ und des Sinus des von $\vec{a}$ & $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkels φ :

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin(\varphi) \quad \text{wobei } 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \leftarrow \text{Parallelogrammfläche}$$

iii.) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.



7

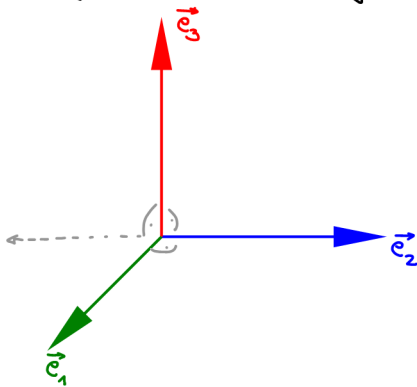
Bemerkungen:

i) Definition liefert keine Konstruktionsvorschrift für die Bestimmung von $\vec{a} \times \vec{b}$

ii) Man spricht „ $\vec{a} \times \vec{b}$ “ als „a kreuz b“ (im Englischen: Cross-Product)

iii) Man nennt das Kreuzprodukt auch äußeres Produkt

iv) Grundlage für die Berechnung des Kreuz-Produktes: Beziehungen der Standard-Einheitsvektoren:



$$\cdot \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\cdot \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\cdot \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

9

Satz (Rechenregeln des Kreuzprodukts)

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und allen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

i.) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (anti-kommutativ)

ii.) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ (distributiv)

iii.) $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b})$ (skalar assoziativ)

iv.) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (Entwicklungssatz, BAC-CAB-Regel)

v.) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ \& \; } \vec{b} \text{ sind kollinear.}$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = +\vec{e}_2$$

10

Damit ergibt sich: Berechnungsvorschrift für das Kreuzprodukt

▶ 11

Satz (Kreuzprodukt - Berechnung)

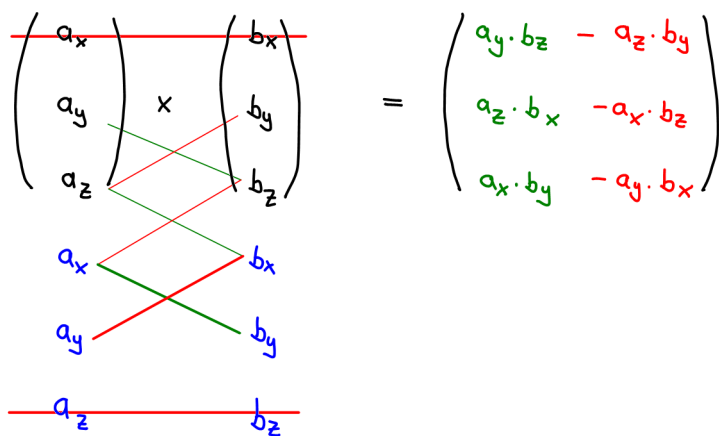
Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ zwei beliebige Vektoren des $\mathbb{R}^3$, dann berechnet sich das Vektorprodukt/Kreuzprodukt zu:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Praktische Bestimmung:

▶ 12

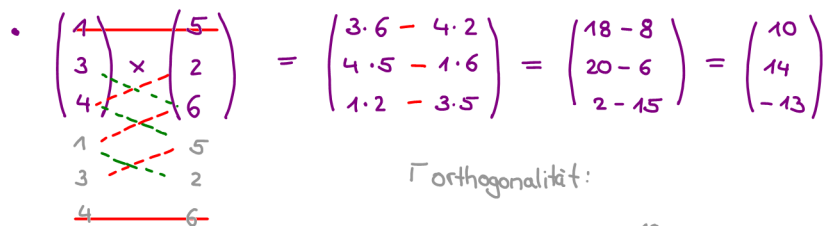
Variante 1:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$


Variante 2:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ -(a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 5 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 8 \\ 20 - 6 \\ 2 - 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix}$$


▶ 13

Orthogonalität:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix} : \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix} \right\rangle = 10 + 42 - 52 = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix} : \quad \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ -13 \end{pmatrix} \right\rangle = 50 + 28 - 78 = 0 \quad \checkmark$$

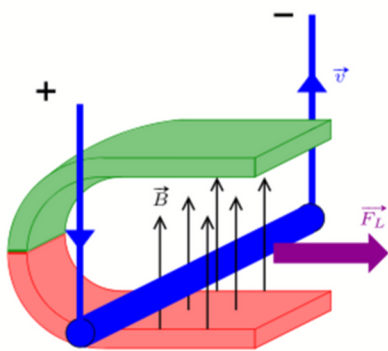
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - (-7) \cdot (-2) \\ -(1 \cdot 3 - (-7) \cdot 2) \\ 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 14 \\ -(3 + 14) \\ -2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix}$$

▶ 14

Kreuzprodukt in der Physik

- Die Lorentzkraft $\vec{F}_L$ ist die Kraft, die auf einen bewegten Ladungsträger im Magnetfeld wirkt.

▶ 15



Sie wird berechnet mittels

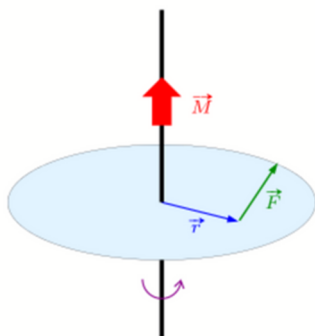
$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

wobei Q die Ladung ist, $\vec{v}$ die Geschwindigkeit der Ladung und $\vec{B}$ das Magnetfeld.

Bei der Ermittlung der Richtung in die die Kraft z. B. auf einen stromdurchflossenen Leiter wirkt, nutzt man die Rechte-Hand-Regel (bei Stromfluß von $+$ nach $-$, d. h. der technischen Stromrichtung folgend)

- Das Drehmoment $\vec{M}$ das von einer Kraft $\vec{F}$ auf einen drehbar gelagerten starren Körper erzeugt wird, zeigt entlang der Drehachse und ist gegeben durch:

▶ 16



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

wobei $\vec{r}$ den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Drehachse beschreibt.