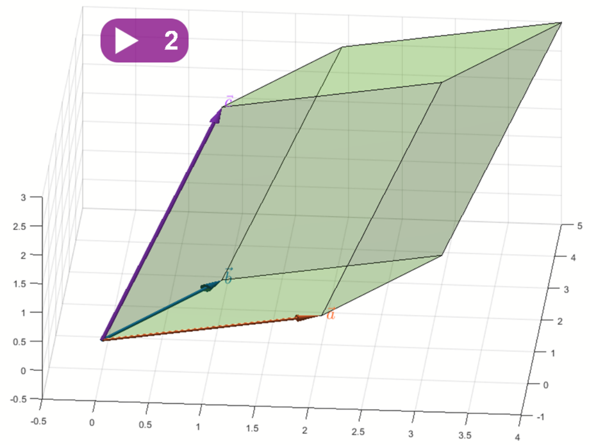
Spezielles Produkt im $\mathbb{R}^3$: Spatprodukt

Definition (Spatprodukt)

Für je drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ nennt man

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \in \mathbb{R}$$

das Spatprodukt von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$



$|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ = Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gebildeten Spats (Parallelepiped)

Praktische Berechnung – Regel von Sarrus

$$\left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x \cdot b_y \cdot c_z + b_x \cdot c_y \cdot a_z + c_x \cdot a_y \cdot b_z - b_x \cdot a_y \cdot c_z - a_x \cdot c_y \cdot b_z - c_x \cdot b_y \cdot a_z$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \end{matrix}$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 3$$

$$= 2 + 24 - 2 - 8 + 4 - 3 = \underline{\underline{17}}$$

Satz (Rechenregeln des Spatprodukts)

i.) Zyklische Vertauschung ändert das Spatprodukt nicht

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

ii.) Vertauschen zweier Vektoren ändert das Vorzeichen, z. B.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$$

Beispiel:

- $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 17$

- $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = -\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = -17$

Satz (Händigkeit)

i.) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bilden ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel)

ii.) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bilden ein Linkssystem (Linke-Hand-Regel)

iii.) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ liegen alle in einer Ebene, d. h. sind *komplanar*.