



Vektorräume

Dr. rer.nat. Michael Striebel

1 Reelle Vektorräume

Zielsetzung der Vektorrechnung ist es, das Rechnen, wie man es mit reellen Zahlen gewöhnt ist auf andere Objekte zu übertragen. Es geht hier nicht darum, „komplizierte Berechnungen“ wie z. B. Wurzelziehen oder beliebige Funktionsauswertungen zu überführen, sondern um die



wesentlichen Grundrechenarten, die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl.

Man nennt jede Menge von Objekten für die man diesen beiden Rechenarten ähnliche Operationen definiert hat, die somit eine ähnliche Struktur wie die reellen Zahlen besitzen einen *reellen Vektorraum*.

Definition 1 (reeller Vektorraum)

Ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge V , einer Abbildung

$$+ : V \times V \rightarrow V, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w} \in V$$

Die *Addition* genannt wird und einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, (\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \cdot \vec{v} \in V$$

die *skalare Multiplikation* genannt wird, heißt *reeller Vektorraum*, wenn für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt



- i.) Assoziativität der Addition: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- ii.) Kommutativität der Addition: $\vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u}$
- iii.) es gibt ein neutrales Element $\vec{0} \in V$ bzgl. der Addition,
d. h. $\exists \vec{0} : \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} \forall \vec{v} \in V$.
- iv.) zu jedem $\vec{v} \in V$ gibt es ein inverses Element $-\vec{v}$ bzgl. der Addition,
d. h. so dass gilt $\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$
- v.) Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$
- vi.) $1 \in \mathbb{R}$ ist das neutrale Element bzgl. der skalaren Multiplikation: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
- vii.) Distributivgesetz der Addition: $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
- viii.) Distributivgesetz der skalaren Multiplikation: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, heißen die Elemente von V *Vektoren* und $\vec{0} \in V$ heißt *Nullvektor*.

Bemerkungen:

- Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist zusammen mit der Addition und der Multiplikation wie wir diese kennen ein reeller Vektorraum !
- **Verbinden Sie mit Vektoren nicht ausschließlich Pfeile !** Es geht hier ausschließlich um Eigenschaften und Rechenregeln. Die Pfeile werden nur gerne als anschauliches Beispiel genommen.
- Sehr häufig wird statt der Pfeilnotation, z. B. $\vec{a}$, Buchstaben in Fettdruck verwendet, z. B. $\mathbf{a}$.
- Soll geprüft werden, ob eine Menge V zusammen mit gegebenen Operationen $(+, \cdot)$, die man als Addition und skalare Multiplikation bezeichnet einen Vektorraum bildet, so prüft man hauptsächlich

1.) Ist V abgeschlossen bzgl. $+$ und $\cdot$?

D. h. ist das Ergebnis der Addition zweier Elemente aus V wieder ein Element von V und ist das Ergebnis der Multiplikation eines Elements von V mit einer reellen Zahl wieder ein Element von V ?

2.) Gibt es in V ein additiv neutrales Element ?

3.) Ist die Addition in V kommutativ ?

Selbstverständlich müsste man alle Eigenschaften prüfen um ganz sicher zu gehen, allerdings ergeben sich die anderen für gewöhnlich aus diesen.

Allgemein gilt bei Nachweisen: möchte man zeigen, dass V ein Vektorraum ist, so muss man allgemein operieren (d. h. es dürfen keine konkreten Objekte $\vec{x}, \vec{y}, \dots$ festgelegt werden); möchte man hingegen nachweisen, dass V kein Vektorraum ist, weil z. B. die Abgeschlossenheit bzgl. der Addition nicht gilt, so kann das mit einem konkreten Beispiel gezeigt werden.

- Man kann noch weiter verallgemeinern und statt eines „reellen Vektorraums“ eine „Vektorraum über eine Körper K “ erklären. Damit dürfen auch die skalaren Werte $(\lambda, \mu$ in der Definition Def. 1) aus allgemeineren Gebilden (sog. „Körpern“) sein. Beispiel für einen solchn „Körper“, d. h. eine Alternative zu $\mathbb{R}$ ist insbesondere die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

(Beispiel 1 (reelle Vektorräume))

- a.) Der „Zweidimensionale Anschauungsraum“ (das ist der „Raum der Pfeile“ wie er im Video zur Definition zu sehen ist), versehen mit der Addition durch Aneinanderhängen von Pfeilen und der skalaren Multiplikation durch Strecken, Stauchen und Richtungsumkehr ist ein reeller Vektorraum.
- b.) Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein reeller (und sogar komplexer) Vektorraum



c.) Die Menge der Polynome vom Grad höchstens $n \in \mathbb{N}$, d. h.

$$\mathbb{P}_n := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

versehen mit

- der Addition „+“ zweier Funktion $p, h \in \mathbb{P}_n$ definiert durch
$$(p + h)(x) := p(x) + h(x)$$
- der skalaren Multiplikation „ $\cdot$ “ einer Funktion $p \in \mathbb{P}_n$ mit einer reellen Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ definiert durch
$$(\beta \cdot p)(x) := \beta \cdot (p(x))$$

ist ein reeller Vektorraum.

d.) Die Menge $\mathcal{H}_\omega$ der harmonischen Schwingungen mit identischer Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$, d. h.

$$\mathcal{H}_\omega := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) \mid A, \varphi \in \mathbb{R}, A \geq 0\}$$

versehen mit

- der Addition „+“ zweier Funktion $p, h \in \mathcal{H}_\omega$ definiert durch
$$(p + h)(x) := p(x) + h(x)$$
- der skalaren Multiplikation „ $\cdot$ “ einer Funktion $p \in \mathcal{H}_\omega$ mit einer reellen Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ definiert durch
$$(\beta \cdot p)(x) := \beta \cdot (p(x))$$

ist ein reeller Vektorraum.

e.) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, versehen mit der bekannten Addition und Multiplikation ist **kein** Vektorraum.

f.) Die Menge $\mathcal{H}$ der harmonischen Schwingungen mit beliebiger Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$, d. h.

$$\mathcal{H} := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) \mid \omega, A, \varphi \in \mathbb{R}, \omega, A \geq 0\}$$

versehen mit einer Addition und einer Multiplikation wie unter Punkt d ist **kein** Vektorraum

2 Die wichtigsten reellen Vektorräume

Zusätzlich zu den Grundoperationen Addition und skalare Multiplikation kann man auf Vektorräumen noch weitere Operationen durchführen. Im Weiteren gehen wir auf weitere Operationen nicht vollkommen theoretisch ein, sondern basierend auf den wichtigsten Vektorräumen – dem Raum der Spaltenvektoren und dem Raum der Matrizen. Zu Anschauungszwecken (und zu nichts mehr!) ist noch der Anschauungsraum erwähnt.

Die definierten Grundoperationen erfüllen natürlich die für reelle Vektorräume geforderten Eigenschaften aus Def. 1 (wie man leicht nachprüfen kann!)

2.1 Der $\mathbb{R}^n$ – die Spaltenvektoren



Der insbesondere für die Praxis bedeutendste reelle Vektorraum ist der „Raum der reellen Spaltenvektoren mit n Komponenten“, besser bekannt als der $\mathbb{R}^n$.

Definition 2 (der $\mathbb{R}^n$)

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}^*$ nennt man die Menge

(sprich „ $\mathbb{R}^n$ “)

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

die Menge der n -dimensionalen Spaltenvektoren (über $\mathbb{R}$).

Bemerkungen:

- Es ist zu beachten, dass für jede konkrete Wahl von $n \in \mathbb{N}$ ein anderer Vektorraum entsteht. Für $n = 2$ erhält man z. B. den $\mathbb{R}^2$, für $n = 6$ den $\mathbb{R}^6$ usw.. Daher wäre es richtiger von „den $\mathbb{R}^n$ s“ statt von „dem $\mathbb{R}^n$ “ zu sprechen (das hat sich aber nicht eingebürgert).

Insbesondere erhält man für $n = 1$ den $\mathbb{R}^1$ was gleichbedeutend zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist.

- Die Elemente des $\mathbb{R}^n$ werden als (Spalten-)Vektoren bezeichnet und zumeist symbolisiert durch $\vec{x}$ oder $\boldsymbol{x}$ oder $\underline{x}$.

- Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ nennt man die Zahlenwerte $x_1, \dots, x_n$ die *Komponenten* von $\vec{x}$
- zwei Elemente $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ heißen *gleich*, man schreibt $\vec{x} = \vec{y}$, wenn ihre Komponenten paarweise gleich sind, d. h. falls gilt $x_k = y_k \forall k = 1, \dots, n$ (wobei x_k und y_k die jeweils k -te Komponenten von $\vec{x}$, bzw. $\vec{y}$ ist)
- Der Vektor aus $\mathbb{R}^n$ dessen Komponenten alle Null sind, heißt *Nullvektor* $\vec{o}$ (resp. $\underline{o}$), d. h.

$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- Die n Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißen die *Standardeinheitsvektoren* des $\mathbb{R}^n$

2.1.1 Grundrechenarten in $\mathbb{R}^n$

Definition 3 (Addition und skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^n$)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt.

Dann definiert man eine „Addition zweier Vektoren“ und eine „skalare Multiplikation“ wie folgt:

i.) *(Vektor-)Addition in $\mathbb{R}^n$*

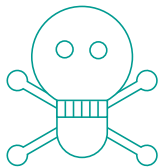
Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist die Summe $\vec{x} + \vec{y}$ der beiden Vektoren „komponentenweise definiert“, d. h.

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

ii.) skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^n$

Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ ist die Multiplikation der Zahl (des *Skalars*) c mit dem Vektor $\vec{x}$ „komponentenweise definiert“, d. h.

$$c \cdot \vec{x} = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}$$



Eine Multiplikation von Vektoren und eine Division durch Vektoren des $\mathbb{R}^n$ ist **nicht** definiert !



Einige Rechenbeispiele zur Vektoraddition und zur skalaren Multiplikation

2.2 Der $\mathbb{R}^{n \times m}$ – die Matrizen

Definition 4 (Matrix)

Für gegebene $n, m \in \mathbb{N}^*$ nennt man die Menge (sprich „R n kreuz m“)

$$\mathbb{R}^{n \times m} := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in \mathbb{R} \begin{array}{l} \text{für } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \text{und } j \in \{1, 2, \dots, m\} \end{array} \right\}$$

die Menge der Matrizen mit n Zeilen und m Spalten (über $\mathbb{R}$).

Ein Element aus $\mathbb{R}^{n \times m}$ wird als $n \times m$ -Matrix (oder nur *Matrix*) bezeichnet

Bemerkungen:

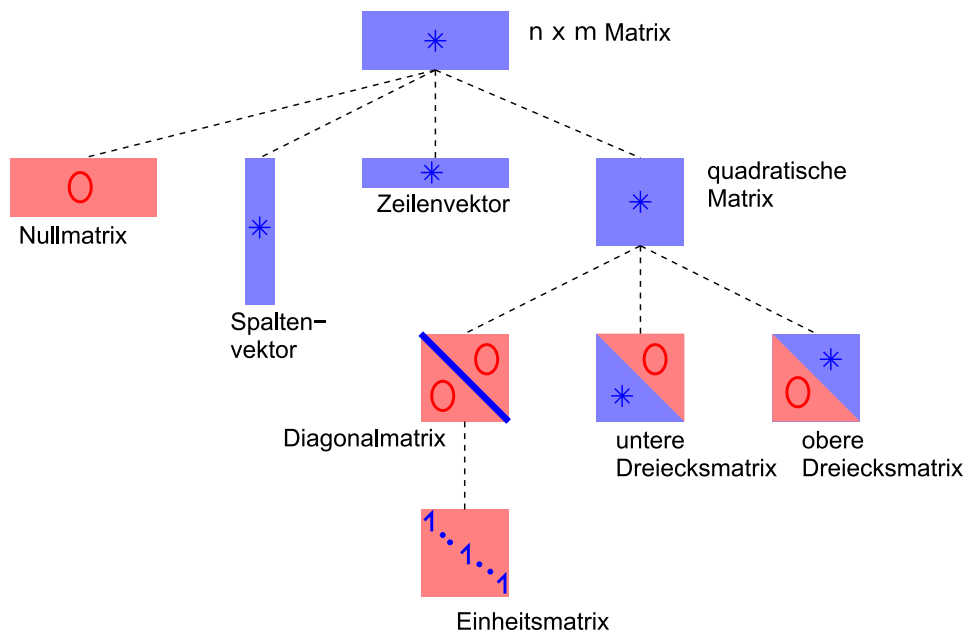
- Man nennt den $\mathbb{R}^{n \times m}$ auch *Menge der $n \times m$ -Matrizen* (sprich „n kreuz m Matrizen“)
- Es ist zu beachten, dass für jede konkrete Wahl von n und m eine andere Menge von Matrizen entsteht.

Insbesondere erhält man für

- $m = 1$ den $\mathbb{R}^{n \times 1}$, was gleichbedeutend zum $\mathbb{R}^n$ ist,
 - $n = m = 1$ den $\mathbb{R}^{1 \times 1}$ was gleichbedeutend zur Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist.
- Das Zahlenschema in Def. 4 wird auch kompakt dargestellt als $(a_{i,j})_{n,m}$, wobei „ n,m “ verdeutlichen soll, dass i die Werte 1 bis n und j die Werte 1 bis m durchläuft. Ist aus dem Kontext klar, wie groß n und m sind, schreibt man häufig auch $(a_{i,j})$
 - Die Elemente des $\mathbb{R}^{n \times m}$ werden zumeist mit (fettgedruckten) Großbuchstaben, z. B. A oder $\mathbf{A}$ symbolisiert. Mitunter sieht man auch unterstrichene Großbuchstaben, z. B. $\underline{A}$ als Symbol für eine Matrix.
 - In „ $a_{i,j}$ “ steht der erste Index (hier i) immer für die Zeile, der zweite Index (hier j) immer für die Spalte, in der sich das Element befindet. Man spricht daher auch von *Zeilenindex* und *Spaltenindex*.
 - Zwei $n \times m$ -Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ heißen *gleich* – man schreibt dann $A = B$ – wenn ihre Elemente paarweise gleich sind, d. h. falls gilt $a_{i,j} = b_{i,j} \forall i = 1, \dots, n$ und $\forall j = 1, \dots, m$ (wobei $A = (a_{i,j})_{n,m}$ und $B = (b_{i,j})_{n,m}$)

Definition 5 (Spezielle Matrizen)

- i.) Eine $n \times n$ -Matrix $A = (a_{i,k})$ heißt *quadratische Matrix der Ordnung n* . Die Elemente $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ heißen *Hauptdiagonalelemente* von A .
- ii.) Eine quadratische Matrix $A = (a_{i,j})$ heißt *Diagonalmatrix*, wenn $a_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt.
- iii.) Eine Diagonalmatrix der Ordnung n mit $a_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$ heißt *Einheitsmatrix* E_n oder E oder I_n oder I der Ordnung n .
- iv.) Eine quadratische Matrix, die unterhalb bzw. oberhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen enthält heißt *obere* bzw. *untere Dreiecksmatrix*.
Es gilt also $a_{i,j} = 0$ für $j < i$ bzw. $j > i$.
- v.) Die $n \times m$ -Matrix mit $a_{i,j} = 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ & $j = 1, \dots, m$ heißt *Nullmatrix* $O_{n,m}$.
- vi.) Eine $n \times 1$ -Matrix heißt *n -dimensionaler Spaltenvektor*.
- vii.) Eine $1 \times m$ -Matrix heißt *m -dimensionaler Zeilenvektor*.



(Beispiel 2) Beispiele:

a.) quadratische Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

b.) Diagonalmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c.) Einheitsmatrizen:

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d.) obere Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e.) untere Dreiecksmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

f.) Nullmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2},$$

g.) Spaltenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} (= \mathbb{R}^3), \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1} (= \mathbb{R}^4)$$

h.) Zeilenvektoren

$$(2 \ 2) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}, (1 \ 2 \ 3 \ -4 \ 5) \in \mathbb{R}^{1 \times 5}$$

man schreibt hier auch z. B. $(1, 2, 3, -4, 5)$

2.2.1 Grundrechenarten im $\mathbb{R}^{n \times m}$

Definition 6 (Addition und skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^{n \times m}$)

Sei $n, m \in \mathbb{N}^*$ fest gewählt.

Dann definiert man eine „Addition zweier $n \times m$ -Matrizen“ und eine „skalare Multiplikation“ wie folgt:

i.) *(Matrix-)Addition im $\mathbb{R}^{n \times m}$*

Für $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist die Summe $A + B$ der beiden Matrizen „komponentenweise definiert“, d. h.

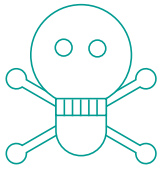
$$A + B = (a_{i,k})_{n,m} + (b_{i,k})_{n,m} = (a_{i,k} + b_{i,k})_{n,m}$$

ii.) *skalare Multiplikation in $\mathbb{R}^{n \times m}$*

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $c \in \mathbb{R}$ ist die Multiplikation der Zahl (des *Skalars*) c mit der

Matrix A „komponentenweise definiert“, d. h.

$$c \cdot A := c \cdot (a_{i,k})_{n,m} = (c \cdot a_{i,k})_{n,m}$$



Eine Division durch Matrizen ist **nicht** definiert !



Einige Rechenbeispiele zur Addition und skalaren Multiplikation von Matrizen

2.3 Der Anschauungsraum

Die Menge von frei im „Raum“¹ verschiebbaren Pfeile fester Länge und vorgegebener Richtung, bildet mit der „Vektoraddition“ und der „skalaren Multiplikation durch Streckung“ wie weiter unten beschrieben einen Vektorraum



Bitte beachten!

I.) **Vektoraddition:** Zwei Vektoren $\vec{a}$ & $\vec{b}$ werden durch die folgenden Schritte geometrisch addiert (Abb. 1)

- 1.) Der Vektor $\vec{b}$ wird parallel verschoben, so dass sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.
- 2.) Der vom Anfangspunkt des Vektors $\vec{a}$ zum Endpunkt des verschobenen Vektors $\vec{b}$ verlaufende Pfeil $\vec{s}$ repräsentiert den Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$.

II.) **skalare Multiplikation durch Streckung:**

Ein Vektors $\vec{a}$ wird mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ durch Streckung² um den Faktor λ „skalar multipliziert“. Ist $\lambda < 0$ wird $\vec{a}$ zunächst invertiert und dann der invertierte Vektor $-\vec{a}$ um den Faktor λ gestreckt.

¹Was wir mit den Ausdehnungen „Länge und Breite“ bzw. „Höhe, Länge und Breite“ beschreiben, d. h. der „2D“ bzw. der „3D“

²Falls $|\lambda| < 1$ spricht man auch von einer Stauchung

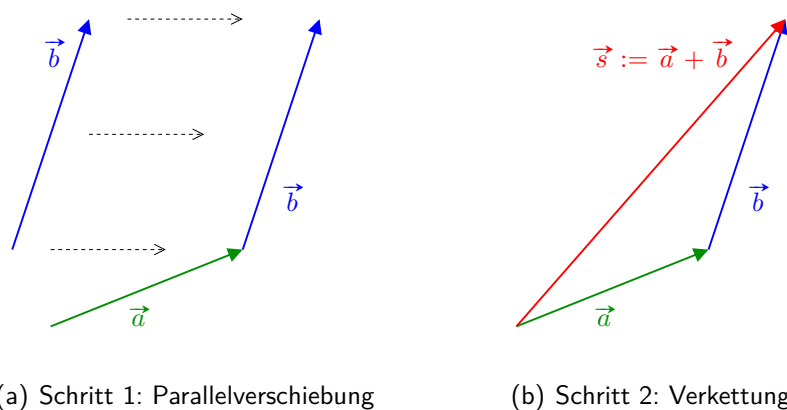


Abbildung 1

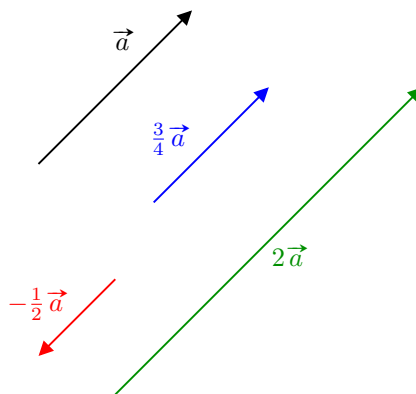


Abbildung 2: Beispiele für Multiplikation von Vektor und Skalar

3 Basis und Koordinatendarstellung in reellen Vektorräumen

Ein reeller Vektorraum V mit Operationen $+$ und $\cdot$ ist zunächst nichts als eine Menge von Objekten, mit denen man „ordentlich“ rechnen kann.

Im Weiteren geht es darum:

- Relationen zwischen Elementen von V , d. h. zwischen Vektoren, herzustellen und
- dem Vektorraum eine Struktur zu geben und ihn damit „beschreibbar“ zu machen.

Die wichtigsten Begriffe sind hier:

Linearkombination, lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Koordinatendarstellung

Eines der wichtigsten Ergebnisse der Überlegung sei schon vorweggenommen:
Viele reelle Vektorräume lassen sich mit Hilfe des $\mathbb{R}^n$ (mit passendem n) beschreiben.

Definition 7 (Linearkombination)

Es seien $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m$ beliebige Vektoren eines Vektorraumes V und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ m Skalare. Dann heißt der Vektor $\vec{a}$ mit

$$\begin{aligned}\vec{a} &:= \lambda_1 \cdot \vec{c}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{c}_2 + \dots + \lambda_m \cdot \vec{c}_m \\ &= \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \vec{c}_k\end{aligned}$$

Eine *Linearkombination* der Vektoren $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$. Die Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen *Koeffizienten* der Linearkombination.



Beispiele für Linearkombinationen

Einige Fragen, die sich aus dem Begriff der Linearkombination sofort ergeben sind:

- 1.)  Angenommen, es sind m Vektoren (Elemente eines Vektorraums!) gegeben, welche Vektoren lassen sich dann als Linearkombination dieser Vektoren darstellen ?
- 2.)  Kann man herausfinden, ob ein Vektor sich als Linearkombination gegebener Vektoren darstellen lässt und wenn „ja“, welche Koeffizienten dann zu wählen sind?
- 3.)  Wenn sich ein Vektor als Linearkombination gegebener Vektoren darstellen lässt, gibt es dann mehr als einen „Satz von Koeffizienten“, d. h. lässt er sich auf unterschiedliche Arten darstellen?
- 4.)  Wieviele Vektoren sind notwendig, um alle Elemente eines Vektorraumes durch Linearkombinationen dieser Vektoren zu schreiben?

Zur **Beantwortung** dieser Fragen benötigt man diverse Begriffe:

Definition 8 (Spann / aufgespannter Unterraum / lineare Hülle)

Seien k Vektoren $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k$ eines reellen Vektorraums V gegeben.

Man bezeichnet die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k$:

$$\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k) := \left\{ \sum_{l=1}^k \lambda_l \cdot \vec{c}_l \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

als den von diesen Vektoren *aufgespannte Unterraum* (auch als: die von diesen Vektoren erzeugte *lineare Hülle* und als *Spann* der Vektoren).

Der Spann / aufgespannte Unterraum formalisiert also die Frage 1.) und sagt, dass jeder Vektor, der Element des Spanns ist als Linearkombination der den Spann aufspannenden Vektoren dargestellt werden kann und jede Linearkombination im Spann zu finden ist.

Damit ist auch die Frage 2.) beantwortet: Ist ein Vektor $\vec{x} \in V$ Element von $\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)$, d. h. man reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ finden, so dass $\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{c}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{c}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{c}_k$, so lässt sich $\vec{x}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k$ darstellen.



Der Spann hat sogar „schöne“ Eigenschaften:

- **Es ist $\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k) \subseteq V$.**
- **Der $\text{span}(\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k)$ ist ein reeller Vektorraum.**

Enthält die Menge $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_k\}$ von Vektoren redundante Information, d. h. lassen sich einer oder mehr Vektoren dieser Menge als Linearkombination der anderen schreiben, so ist die Darstellung einer Linearkombination der Vektoren nicht eindeutig.

Die *lineare Unabhängigkeit* beschreibt



Definition 9 (lineare (Un-)Abhängigkeit)

Sei V ein Vektorraum

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\} \subset V$ heißt *linear unabhängig* (l.u.a.), wenn gilt:

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{x}_k = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

Gibt es hingegen mindestens ein $\lambda_l \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ mit $\lambda_l \neq 0$, so dass $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{o}$, heißen die Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$ *linear abhängig* (l.a.)

Bemerkungen:

- Ist einer der Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in V$ der Nullvektor aus V , so ist die Menge dieser Vektoren linear abhängig.
- Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V$ mit $\vec{x} \neq \vec{o}$ und $\vec{y} \neq \vec{o}$ sind nach Def. 9 linear abhängig, wenn es zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \neq 0$ gibt, so dass $a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{y} = \vec{o}$, d. h. $\vec{y} = -\frac{a}{b} \vec{x}$. D. h. $\vec{y}$ ist ein Vielfaches von $\vec{x}$.

Man spezifiziert diese Beziehung als:

Definition 10 (Parallelität, Antiparallelität, Kollinearität)

Je zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in V \setminus \{\vec{o}\}$ heißen

- i.) *kollinear* $:\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \vec{y} = c \cdot \vec{x}$
- ii.) *parallel*, falls sie kollinear sind mit $c > 0$
- iii.) *antiparallel*, falls sie kollinear sind mit $c < 0$

Definition 11 (Basis, Dimension)

Es sei V ein Vektorraum.

Eine Menge $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\} \subset V$ von Vektoren heißt *eine Basis von V* , und die Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ heißen *Basisvektoren von V* , wenn gilt

- a.) $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ sind linear unabhängig und
- b.) jeder Vektor $\vec{a} \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise, d. h. mit eindeutigen Koeffizienten $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ als Linearkombination

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \vec{b}_k$$

der Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ dargestellt.

Man bezeichnet dann

- n als *Dimension von V* und schreibt: $\dim(V) = n$
- die Skalare $a_1, \dots, a_n$, die zur Beschreibung eines Vektors $\vec{a} \in V$ nötig sind, als *die Koordinaten von $\vec{a}$* . Den Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet man als die *Koordinatendarstellung* von $\vec{a}$ bzgl. der Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$



Bemerkungen:

- In einem n -dimensionalen Raum sind $n + 1$ Vektoren immer linear abhängig.
- In einem n -dimensionalen Raum kann es keine Basis aus weniger als n Vektoren geben.
- Unterschiedliche Bezugssysteme führen zu unterschiedlichen Koordinatendarstellungen desselben Vektors.